PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE

Do tej pory obliczaliśmy prawdopodobieństwo metodą klasyczną.
W teorii rachunku prawdopodobieństwa pojawią się jeszcze inne wzory jak ten teraz: **warunkowy**. Należy go zastosować, gdy w zadaniu będziesz mieć dwa zdarzenia A i B, a między nimi jeden ze zwrotów:

A pod warunkiem B

A jeżeli B

A jeśli B

A gdy wiadomo, że B

Jeśli np. przeczytasz w treści zadania: „Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystej liczby **jeżeli** wypadła podzielna przez siedem”, to masz do czynienia z **prawdopodobieństwem warunkowym**. Wtedy przed wyrazem „jeżeli” znajduje się zdarzenie A i po wyrazie „jeżeli” znajduje się zdarzenie B.
Prawdopodobieństwo warunkowe obliczasz z wzoru:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Symbol $P(A/B)$oznacza prawdopodobieństwo wystąpienia zdarzenia A pod warunkiem, że zaszło zdarzenie B.
W liczniku wzoru jest iloczyn zdarzeń $P(A \cap B)$, który ćwiczyliśmy, a w mianowniku jest $P(B)$. Wystarczy te dwie liczby podzielić.
Zadania warunkowe oblicza się łatwo i zaraz się o tym przekonasz.

Przykład.
Rzucono jeden raz sześcienną kostką do gry. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia parzystych oczek **pod warunkiem**, że wypadła ilość oczek podzielna przez 3.

Przede wszystkim odnajdziemy w treści zadania zdarzenie A i B.
A - jest napisane przed zwrotem **pod warunkiem**, więc:
A - **wypadły parzyste oczka**.

B – jest napisane po zwrocie **pod warunkiem**, więc jest to zdarzenie:
B - **liczba oczek podzielna przez 3**.

Prawdopodobieństwo warunkowe oblicza się w prosty sposób postępując według planu, który zaraz Ci napiszę.

Postępuj według takiego planu:

Zapisz zbiór A, policz moc $\overline{\overline{A}}$, oblicz $P(A)$. Tak samo dla $B, \overline{\overline{B}}, P(B)$. Podaj wspólne elementy iloczynu $(A \cap B)$, zapisz moc $\overline{\overline{A \cap B}}$, oblicz prawdopodobieństwo $P(A \cap B)$. Wstaw ułamki do wzoru.

Wypiszemy omegę do naszego zadania:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\quad \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = \mathbf{6}$

A **–** zdarzenie losowe: parzyste oczka

B **–** zdarzenie losowe: liczba oczek podzielna przez 3

a) $A = \{2,4,6\}$ $\quad \overline{\overline{A}} = 3 \quad P(A) = \frac{3}{6}$

b) $B = \{3,6\}$ $\quad \overline{\overline{B}} = 2 \quad P(B) = \frac{2}{6}$

c) $A \cap B = \{6\}$ $\quad \overline{\overline{A \cap B}} = 1 \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Podstawiamy wyliczone ułamki do wzoru warunkowego:

$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}}$$

Odp. Prawdopodobieństwo warunkowe zdarzeń A i B wynosi $\frac{1}{2}$.

ZADANIE 328. Wykonujemy dwukrotny rzut monetą.

Oblicz prawdopodobieństwo wyrzucenia chociaż jednego orła, jeżeli wypadły dwa orły.

Wypisujemy omegę:

$\Omega = \{(\mathrm{O}, \mathrm{O}), (\mathrm{O}, \mathrm{R}), (\mathrm{R}, \mathrm{O}), (\mathrm{R}, \mathrm{R})\}$ $\quad \overline{\overline{\boldsymbol{\Omega}}} = \mathbf{4}$

I teraz według planu:

$\boldsymbol{A, \overline{\overline{A}}, P(A)}$ **potem** $\boldsymbol{B, \overline{\overline{B}}, P(B)}$
następnie $\boldsymbol{A \cap B, \overline{\overline{A \cap B}}, P(A \cap B)}$

A - wypadł chociaż jeden orzeł, B - wypadły dwa orły.

a) $A = \{(O, R), (R, O), (O, O)\}$ $\quad \overline{\overline{A}} = 3 \quad P(A) = \frac{3}{4}$

b) $B = \{(O, O)\}$ $\quad \overline{\overline{B}} = 1 \quad P(B) = \frac{1}{4}$

c) $A \cap B = \{(O, O)\}$ $\quad \overline{\overline{A \cap B}} = 1 \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$

Podstawiamy $P(A \cap B)$ oraz $P(B)$ do wzoru na prawdopodobieństwo warunkowe: $\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} = \underline{1}}$ i to jest wynik końcowy.

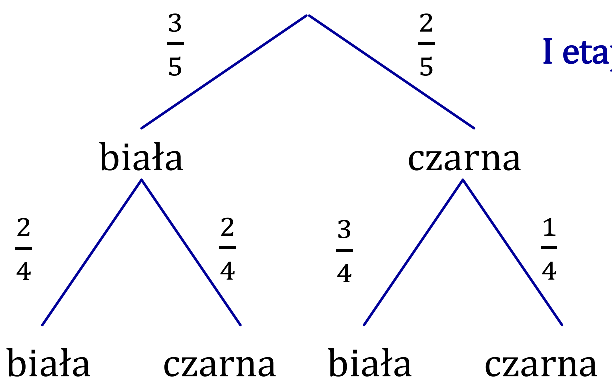
Przeanalizujemy teraz prawdopodobieństwo warunkowe na drzewku, bo uczniowie mają czasem problem, na których gałązkach znajduje się iloczyn zdarzeń $A \cap B$.

ZADANIE 329. W urnie są 3 kule białe i 2 czarne. Wyjmujemy z niej najpierw jedną kulę, a potem drugą. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania 2 kul białych **jeżeli wiadomo, że** druga kula jest biała?

Wygenerujemy z treści zadania zdarzenia losowe $\boldsymbol{A}$ i $\boldsymbol{B}$:
$\boldsymbol{A}$ - obie kule są białe **$\boldsymbol{B}$ - druga kula jest biała**

Aby zrozumieć iloczyn $\boldsymbol{A \cap B}$ – połączmy treść zdarzeń A i B w jedno zdanie, ponieważ w iloczynie zachodzi jedno i drugie zdarzenie.
$\boldsymbol{A \cap B}$ - obie kule białe i druga kula jest biała.

Metoda drzewka. $\boxed{\boldsymbol{3B, 2C}}$ to nasza urna z kulami.



I etap - losujemy pierwszą kulę z 5 kul.

II etap – losujemy drugą kulę z 4 pozostałych kul.

a) A - obie kule białe, czyli $\boldsymbol{BB}$ - pierwsza „ścieżka”;
$$P(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$
b) B- druga kula biała; czyli $B\boldsymbol{B}$ i $C\boldsymbol{B}$; pierwsza i trzecia „ścieżka”;
$$P(B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6+6}{20} = \frac{12}{20}$$
c) Iloczyn $A \cap B$ oznacza **obie białe i drugą białą**, to pierwsza „ścieżka”;
$$P(A \cap B) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20}$$

Podstawiamy ułamki $P(A \cap B)$ i $P(B)$ do wzoru na prawd. warunkowe:
$$\boldsymbol{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{6}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{6}{12} = \underline{\frac{1}{2}}}$$
Odp. Prawdopodobieństwo zdarzenia , że obie kule są białe pod warunkiem, że druga kula jest biała wynosi $\frac{1}{2}$.
